

---

Espaces vectoriels & Applications linéaires

---

**Exercice 1.** On considère l'ensemble  $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \\ y \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{R} \right\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Donner une base de  $F$  et sa dimension.

**Exercice 2.** Montrer que que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + 2z = 0 \right\}, \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0 \right\}.$$

**Exercice 3.** Soient  $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0 \right\}$  et  $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x + z = y + t \right\}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Donner une base de  $F$ ,  $G$  et  $F \cap G$ .

**Exercice 4.** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels  $x, y, z$  pour que  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ .

**Exercice 5.** Soit  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  une famille libre. Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$\{e_1, 2e_2, e_3\}, \quad \{e_1, e_3\}, \quad \{e_1, 2e_1 + e_4, e_4\}, \quad \{3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3\} \quad \text{et} \quad \{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}.$$

**Exercice 6.** Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \\ x+3y+z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ .
3. Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .
4.  $f$  est-elle injective ?  $f$  est-elle surjective ?
5. Déterminer  $M_{B,B}(f)$  la matrice de  $f$  relativement à  $B$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Mêmes questions pour

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ y \\ x+z \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$$